

VU Research Portal

Effecten van strategisch leren bij wiskunde in de basisvorming

Hoek, D.; Hout-Wolters, B.; Terwel, J.; van den Eeden, P.

published in

Tijdschrift voor didactiek der bèta-wetenschappen
1999

document version

Publisher's PDF, also known as Version of record

[Link to publication in VU Research Portal](#)

citation for published version (APA)

Hoek, D., Hout-Wolters, B., Terwel, J., & van den Eeden, P. (1999). Effecten van strategisch leren bij wiskunde in de basisvorming. *Tijdschrift voor didactiek der bèta-wetenschappen*, 16(2), 144-160.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

E-mail address:

vuresearchportal.ub@vu.nl

Effecten van strategisch leren bij wiskunde in de basisvorming

D. Hoek

Sectie Onderwijsstudies, Universiteit Leiden

B. van Hout-Wolters

Instituut voor de lerarenopleiding, Universiteit van Amsterdam

J. Terwel

Afdeling Onderwijspedagogiek, Vrije Universiteit Amsterdam

Instituut voor de Leraren Opleiding, Universiteit van Amsterdam:

P. van Eeden

Faciliteit der Sociaal Culturele Wetenschappen Faculteit, Vrije Universiteit Amsterdam

Summary

This article reports on two intervention studies into the effects of an instruction in the use of social or/and cognitive strategies on the learning outcomes of students in secondary mathematics education. Special attention is given to differential effects for low and high-achieving students. The experiments were addressed to the following research question: what are the general and differential effects of training in the use of social or/and cognitive strategies on the results of learning in secondary mathematics?

In the first study three instructional programmes for co-operative groups were compared: (1) an experimental programme with special instruction in the use of social strategies, (2) an experimental programme with special instruction in the use of cognitive strategies, and (3) a control programme without instruction in either social or cognitive strategies. The programmes were identical with respect to mathematical content and general instructional settings. The design was a pre-test post-test control group design, using two experimental programmes and one control programme. The data were analysed from a multilevel perspective.

The outcomes of the first study clearly show that instruction to use social or cognitive strategies has the expected, positive effects. In addition to this main effect, a compensatory effect for the low-achieving students was found. The low-achieving students in the experimental programmes outperformed their counterparts in the control programme.

In the experimental programme of the second study students received a training in which social and cognitive strategies were integrated. Students in the control group did not receive any training but were merely told to help each other.

It turned out that in general students in the experimental programme outperformed the students in the control programme. However, low-achieving students in the experimental programme had about the same learning gain as the low achieving students in the control programme, while the high achieving students in the experimental programme outperformed their counterparts in the control programme.

Four different causes are discussed in detail to explain the different results of the first and the second study: (1) the complexity of the instruction of the second study; (2) distance: the extent to which a new practice is congruent with daily routines of teachers and students; (3) uncertainty for the students of the innovation; (4) sample differences: in the first and second study different schools participated.

1. Inleiding

Het leren oplossen van problemen in contexten uit het dagelijks leven is een belangrijke doelstelling van het onderwijs van de basisvorming in de exacte vakken (Roelofs & Terwel, 1999). Er zijn verschillende manieren om deze doelstelling te bereiken. Het samenwerken in kleine groepen is daar één van. Als leerlingen in kleine groepen samenwerken bij het oplossen van wiskundige problemen, kunnen zij elkaar helpen om tot een beter begrip en een dieper inzicht te komen. Er zijn echter aanwijzingen dat zwakke en sterke leerlingen op verschillende wijze aan het groepswork deelnemen en mede daardoor in verschillende mate van het leren in kleine groepen profiteren. Zwakke leerlingen lijken minder profijt te hebben van het groepswork dan sterke leerlingen (differentieel effect). Twee theoretische perspectieven kunnen worden gebruikt ter verklaring van het differentieel effect. Vanuit een verkenning van de literatuur kwam de vraag op hoe het onderwijs leerlingen kan toerusten opdat zij wiskundige problemen leren oplossen in coöperatieve groepen.

Dit artikel is als volgt opgebouwd. Eerst geven we een korte beschrijving van de theoretische perspectieven. Vervolgens wordt de onderzoeksvraag geformuleerd en een tweetal studies beschreven die zijn opgezet om de onderzoeksvraag te beantwoorden. We besluiten dit artikel met enkele conclusies en bediscussiëren de implicaties hiervan met het oog op vervolgonderzoek en de onderwijspraktijk.

2. Twee perspectieven op differentiële effecten

Tenminste twee theoretische perspectieven kunnen worden genoemd om differentiële effecten te verklaren: een sociaal perspectief en een cognitief perspectief. Beiden hebben het begrip 'toegankelijkheid' in zich (Cohen en Lotan, 1995; Prawat, 1989).

Vanuit het sociale perspectief is te verklaren dat leerlingen in heterogene groepen verschillende mogelijkheden hebben om gebruik te maken van hulpbronnen. Overal waar mensen samenwerken ontstaan statusverschillen. Deze statusverschillen hebben tot gevolg dat zwakke leerlingen minder deelnemen in de groepsinteractie en doordat deze leerlingen minder goed zijn toegerust met kennis en vaardigheden krijgen ze minder makkelijk 'toegang tot de sociale hulpbronnen'. Dit leidt tot minder goede leeruitkomsten (Cohen en Lotan, 1995). Niet is alleen de mate van participatie van belang, ook de inhoud en de manier van interacteren hebben invloed op het leerresultaat van de zwakke leerlingen in groepen (Webb, 1989, 1991). Leerlingen leren het meest als zij zelf een hulpvraag formuleren en uitgebreide hulp krijgen van hun groepsgenoten. Hulp van medeleerlingen is minder effectief als deze niet op verzoek gegeven wordt. Bijvoorbeeld als alleen het antwoord op een probleem wordt verstrekt. Uitgebreide uitleg geeft deze leerlingen de mogelijkheid hun kennisbasis te reconstrueren. Vanuit het sociale perspectief kan het leren bevorderd worden door de participatie in het groepswork te stimuleren

en te verbeteren. Dit wordt bereikt door leerlingen te leren hoe zij effectief aan het groepswork kunnen deelnemen en door interactiepatronen in de klas te beïnvloeden, zodat alle leerlingen 'toegang krijgen tot de sociale hulpbronnen', die nodig zijn voor hun leren (Cohen en Lotan, 1995; Webb, 1989, 1991, 1995).

Vanuit het cognitieve perspectief is eveneens te verklaren waarom zwakke leerlingen minder van groepswork profiteren. Zij beschikken niet over voldoende voorkennis (declaratief, procedureel en strategisch) om actief aan het oplossingsproces deel te nemen. Differentiële effecten kunnen worden verklaard in termen van toegang tot cognitieve hulpbronnen i.c. kennis. Zwakke leerlingen zijn niet altijd in staat om de juiste kennis en probleemoplossingsstrategieën te gebruiken. Zij begrijpen meestal niet welke strategieën sterke leerlingen gebruiken en waarom ze dat doen. Voor sterke leerlingen is het niet makkelijk om hun routinematig gebruikte strategieën uit te leggen aan de zwakke leerlingen.

Het cognitieve perspectief indiceert dat het leren gestimuleerd kan worden door leerlingen bewust te onderwijzen in het gebruik van strategieën. De leraar kan leerlingen leren om (meta-)cognitieve strategieën te gebruiken, dit kan door het modelleren van de werkelijkheid via planning, monitoring, controle en revisie. Het onderwijzen van strategieën is het meest effectief als het ingebed is in de context van het schoolcurriculum (Hattie, Biggs en Purdie, 1996). Probleem oplossingsstrategieën moeten gekoppeld worden aan de domein-specifieke kennis. Deze strategieën moeten ook verbonden worden aan kennis opgedaan in het dagelijkse leven en aan de dagelijkse ervaring. Vaardigheden om een representatie te kunnen maken lijken essentieel bij het tot stand brengen van een brug tussen de genoemde componenten. Bij deze vaardigheden is te denken aan het maken van representaties in woorden, grafieken, tabellen en vergelijkingen. Leerlingen moeten leren om tussen de verschillende representaties te wisselen. Dit is essentieel voor het probleemoplossingsproces. Daarnaast bieden deze representaties de mogelijkheid om makkelijker te kunnen communiceren met de leerkracht en de klasgenoten. Bij het representatieproces speelt reflectie een belangrijke rol (Ausubel, 1968; Brenner e.a., 1997; Chinnappan & Lawson, 1996; De Corte & Verschaffel, 1988; Greer, 1997; Prawat, 1989; Resnick, 1989; Schoenfeld, 1985, 1992).

Vanuit bovenstaande theoretische verkenning kan worden geconcludeerd dat het sociale en het cognitieve perspectief elkaar aanvullen bij het verklaren van het differentiële effect voor zwakke en sterke leerlingen bij het leren in coöperatieve groepen. Verschillende sociale en cognitieve factoren vormen een obstakel voor zwakke leerlingen. Daardoor nemen de verschillen in leeruitkomsten tussen zwakke en sterke leerlingen toe. Instructie in het leren probleemoplossen en het leren effectief samen te werken lijken een oplossing te bieden voor het geschetste probleem. Op basis van de hiervoor beschreven perspectieven werden 2 studies ontworpen en uitgevoerd.

3. Onderzoeksvraag en hypothese

De onderzoeken zijn gericht op het effect van een interventie. De vraagstelling voor beide onderzoeken is: wat is het effect van een speciale instructie en begeleiding gericht op de verwerving van sociale en / of cognitieve strategieën op de leerwinst van zwakke en sterke leerlingen bij het leren in kleine groepen?

De verwachting is dat het expliciet onderwijzen van sociale en cognitieve strategieën het differentiële effect van het leren in kleine groepen op de leerwinst van zwakke en sterke leerlingen verkleint. Dit betekent dat het verschil in prestaties tussen de zwakke en sterke leerlingen wordt verkleind in vergelijking met de controle groep.

Deze hypothese wordt getoetst in een multiniveau model. Daarbij wordt gecontroleerd voor het individueel effect van de voorttoetsscore op de na-toetsscore. In de analyse is er voor gekozen om de totale groep leerlingen niet te splitsen in drie afzonderlijke categorieën, 'zwak', 'middelmatic' en 'sterk', op grond van de score op de voortoets. Als er wordt gesproken over zwakke en sterke leerlingen betreft het dus geen strikt afgebakende categorieën maar een continue variabele.

4. De eerste studie

In de eerste studie zijn 21 klassen met in totaal 511 leerlingen van twee scholen betrokken. In de eerste empirische studie vergeleken we drie verschillende experimentele programma's voor het leren oplossen van wiskunde problemen in kleine groepen in de eerste fase voortgezet onderwijs (de basisvorming). Leraren en klassen werden zoveel mogelijk a-select toegewezen aan de programma's. De drie programma's werden binnen elk van de scholen gerealiseerd om eventuele schooleffecten te neutraliseren. Het onderzoek strekte zich uit over 4 lesweken en is uitgevoerd in het eerste leerjaar van het voortgezet onderwijs (basisvorming) bij het vak wiskunde. De samenstelling van de klassen op beide scholen is heterogeen voor wat betreft het eerste cursusjaar. Dit betekent concreet dat MAVO, HAVO en VWO leerlingen in dezelfde klas zitten.

Voorafgaand en direct na het experiment werd een identieke toets voor wiskundig redeneren afgenomen. Deze toets bestaat uit twee sub-schalen van een bestaand instrument, het 'Prüfsystem für Schul-und Bildungsberatung', hierna afgekort met PSB (Horn, 1969). De subschalen Figurenreeks (subschaal 3) en Letter- en Cijferreeks (subschaal 4), bestaan elk uit 40 non-verbale items, die in moeilijkheid opklimmen. De instructie voor afname van deze toets is overgenomen uit Herfs, Mertens, Perrenet en Terwel (1991, blz. 160 en 162).

4.1. Procedure en materialen

Bij het ontwikkelen van de experimentele programma's is gebruik gemaakt van nieuw ontworpen opgaven en van bestaand lesmateriaal dat is aangepast met het oog op de doelstelling van het onderzoek. Daarbij is gebruik gemaakt van de perspectieven en aanbevelingen die verschillende auteurs hebben gegeven voor het ontwikkelen van experimentele programma's. In deze studie werden de volgende programma's ontwikkeld: (1) een cognitief programma, waarin leerlingen onderwijs kregen in het gebruik van strategieën voor het oplossen van wiskundige problemen, (2) een sociaal programma, waarin leerlingen werden onderwezen in het effectief samenwerken in kleine groepen en (3) een controle programma, waarbij leerlingen werd gevraagd om in kleine groepen samen te werken bij het oplossen van de vraagstukken, zonder expliciete training in sociale of cognitieve strategieën. In alle drie programma's werd gebruik gemaakt van het model voor Adaptief GroepsOnder-

wijs (AGO-model, zie Herfs, Mertens, Perrenet & Terwel, 1991). Dit model bestaat uit verschillende fasen:

1. Klassikale introductie
2. Samenwerken in kleine heterogene groepen aan de kern
3. Diagnostische toets
4. Alternatieve leerwegen:
 - 4a. individueel werken in kleine (heterogene) groepen
 - 4b. instructie en begeleiding door de leraar in de homogene (remediale) groep
5. Individueel werken op eigen niveau in heterogene groepen met wederzijdse hulp.
6. Klassikale reflectie en vooruitblik.
7. Eindtoets.

Dit model is in alle programma's als *uitgangspunt* genomen. Er zijn echter in beide programma's belangrijke *modificaties* toegepast. De aanpassingen in de experimentele programma's betreffen in het bijzonder de fasen 4a, 4b en 5. Na de diagnostische toets werden de leerlingen in homogene niveau groepen ingedeeld: zwak, middelmatig en sterk. In fasen 4a, 4b en 5 werkten de leerlingen in deze homogene groepen aan opgaven op hun niveau, onder begeleiding van de docent. De 'alternatieve leerwegen' werden voortgezet in fase 5: de leerlingen in de zwakke groepen kregen extra begeleiding van de leraar, terwijl de andere leerlingen in hun niveau groep zelfstandig verder werkten aan opgaven op hun niveau, met de mogelijkheid van wederzijdse hulp. Deze aanpassingen vonden plaats met het oog op (1) de wensen van de docenten voor meer permanente (overzichtelijke) homogene subgroepen en (2) de daarmee verbonden praktische uitvoerbaarheid van het onderzoek. De belangrijkste aanpassing betreft dus de instelling van *homogene* groepen in fase 4 en 5. In het oorspronkelijke AGO-model werd in fase 4 en 5 de *heterogeniteit van de kleine groepen gehandhaafd zoals in fase 2*. Daar werden in fase 4b de zwakke leerlingen slechts tijdelijk uit hun heterogene groep gehaald voor remediërende instructie door de leraar, waarna zij weer teruggingen naar hun eigen heterogene groep om zelfstandig op eigen niveau verder te werken met de mogelijkheid van wederzijdse hulp.

In het controleprogramma werd in fase 4 eveneens in homogene niveau groepen gewerkt, echter zonder de speciale, remediërende hulp van de leraar in de laagste niveaugroep. Ook ontvingen deze docenten en leerlingen geen speciale training.

4.2. De docenten en leerling training

Voorafgaand aan het experiment kregen *alle* docenten (in alle programma's) een korte training in het werken met kleine groepen en een oriëntatie op het didactisch arrangement en het bijbehorende lesmateriaal. De inhoud en duur van deze 'basistraining' waren gelijk voor alle programma's en betrof één bijeenkomst van ongeveer 3 uur. Daarnaast werd alle docenten gevraagd een algemene handleiding te lezen en het lesmateriaal te bestuderen. Exclusief voor de experimentele docenten was er een tweede bijeenkomst met bijbehorend schriftelijk materiaal in de vorm van een specifieke handleiding. Gedurende deze training oefenden de experimentele docenten de training die

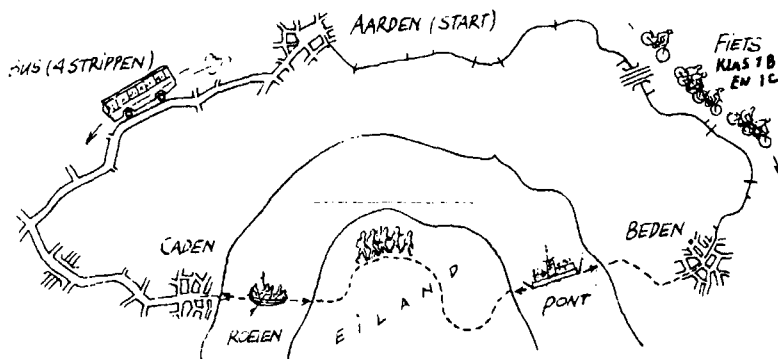
ze aan de leerlingen moesten geven. In verband met de ruimte geven we alleen een deel van de training in het kader van het cognitieve programma weer, voor de sociale training verwijzen we naar Hoek (1998).

Gedurende de eerste les van het cognitieve programma ontvingen de leerlingen een expliciete training in het probleemoplossen van hun docent. We lichten dit toe aan de hand van een vraagstuk uit de methode 'Wiskunde Lijn' dat in de training aan de leerlingen werd voorgelegd (zie Figuur 1).

Voor de vier brugklassen wordt in de laatste schoolweek een fiets-, wandel-, roei- en bustocht georganiseerd. De klassen bestaan uit:

1A 28 leerlingen, 1B 30 leerlingen, 1C 27 leerlingen, 1D 29 leerlingen

Deze tocht ziet er als volgt uit:



Klassen 1B en 1C fietsen, met hun eigen fietsen, van Aarden naar Beden. Vanuit Beden lopen ze naar de pont. Op het eiland moeten ze ook lopen. Aan de andere kant liggen de roeiboten (gebracht door de andere klas) klaar. Ze roeien naar Caden, waar ze met de bus weer terug gaan naar Aarden. De andere twee klassen leggen de route af in tegengestelde richting.

Kosten:

-	pont per persoon	f 1,25
-	roeiboot 6 personen per dag	f 45,00
-	bus 15 strippen kaart per stuk	f 11,20
-	ijsco per stuk	f 0,90
-	fles frisdrank per stuk	f 1,50

Bereken de kosten van deze toerdag per persoon.

Figuur 1: Probleem gebruikt gedurende de training voor de cognitieve vaardigheden.

Voor het oplossen van het probleem in Figuur 1 is het noodzakelijk om een adequate voorstelling van het probleem op te bouwen en subdoelen te hantieren terwijl het einddoel in de gaten wordt gehouden (means-end analysis). De leerlingen worden aan de hand van concrete opgaven vertrouwd gemaakt met een heuristiek voor het oplossen van wiskundige problemen (van Streun, 1989, 1994) en met cognitieve activiteiten als oriënteren, representeren en reflecteren. Na een afsluitende discussie maken de leerlingen onder leiding

van de docent een poster. Hierop is het oplossingsproces schematisch weergegeven en toegelicht in de taal van de leerlingen. De poster wordt in de klas opgehangen. Na deze training wordt de rest van het programma uitgevoerd volgens de cyclus zoals omschreven in het didactisch arrangement. Overigens verschilt de rol van de docent in de training niet van zijn rol bij de verdere uitvoering van het cognitieve programma.

Het programma-op-papier bestaat uit een volledig uitgewerkte lessenserie voor de leerlingen met bijbehorende handleidingen voor de docenten. Dit programma is ontworpen op basis van de genoemde uitgangspunten en gestructureerd volgens de zeven fasen van het hiervoor beschreven didactisch arrangement. Het lesmateriaal is speciaal bewerkt voor de leerlingen in de experimentele programma's. Er is onder meer gebruik gemaakt van extra vragen en aanwijzingen voor het oplossen van de vraagstukken. Deze hebben ten doel de leerlingen te stimuleren om strategisch te werk te gaan.

Hoe gaat de docent nu in de praktijk te werk? In een klassikale situatie demonstreert de docent strategieën voor het oplossen van wiskundige problemen. Hij vervult de rol van de 'meester' in het 'leerling-meester model' (Collins, Brown en Newman, 1989). De docent staat model, bijvoorbeeld door de opgave hardop voor te lezen en zich af te vragen wat het probleem nu precies voorstelt. Hij doet dat in interactie met de klas. Hiermee laat de docent zien dat het belangrijk is zich een juiste voorstelling van het probleem te maken. Daartoe moet de opdracht zorgvuldig worden gelezen. De beeldvorming door de leerlingen kan worden ondersteund door het samen maken van een voorlopig overzicht, tekening, schema of grafiek waarin de probleemsituatie wordt geschetst. Vervolgens bespreekt de docent met zijn leerlingen hoe het probleem opgelost kan worden. Samen met zijn leerlingen maakt hij een plan. Vervolgens wordt dit plan uitgevoerd. Tenslotte laat de docent zien dat het van belang is terug te kijken op het gehele proces en de oplossing op juistheid te controleren.

Leerlingen die achterop dreigen te raken, blijkens de ervaringen bij het werken aan de kern en blijkens de uitkomsten van de diagnostische toets, krijgen extra begeleiding op hun niveau van de docent (in de remediale groep). Deze begeleiding kan worden aangeduid met de metafoor 'scaffolding' (steigerbouw). De leidende gedachte is om aangepaste en tijdelijke hulp aan leerlingen te geven. Deze hulp wordt langzaam teruggenomen wanneer blijkt dat de leerling weer zelfstandig verder kan.

	Voortoets		Natoets	
	Gemiddelde	SD	Gemiddelde	SD
Controle programma	53,1	6,3	54,7	7,9
Sociaal programma	53,5	6,8	56,7	6,8
Cognitief programma	53,5	6,5	57,9	6,6

Tabel 1: Karakteristieken van de verdeling van de wiskunde redeneer voor- en natoets voor alle leerlingen (N-leerlingen = 511, N-klassen = 21).

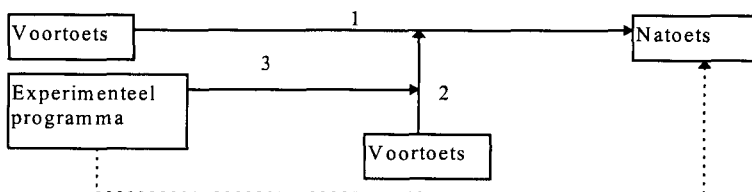
4.3. De resultaten op individueel niveau

We geven nu eerst de belangrijkste karakteristieken van de gegevens uit de voor- en nameting in Tabel 1.

Uit Tabel 1 is af te leiden dat alle leerlingen vooruitgaan van voortoets naar natoets. Voorts blijkt dat de leerwinst van de leerlingen in het experimentele programma's groter is dan die van de leerlingen in het controleprogramma. De leerwinst uitgedrukt in verschillcores is voor de cognitieve groep 4,6 punten, voor de sociale groep 3,2 punten en 1,6 punten voor de controle groep. Uit een variantie analyse blijkt dat er op de voormeting van de wiskundige redeneertoets (PSB) geen significant verschil is tussen de score van de leerlingen in de drie programma's ($F(2,508) = 0,23$; $p = 0,80$). Bij de nameting is er echter wel een significant verschil tussen de gemiddelde score van de leerlingen op de redeneertoets in de drie verschillende programma's ($F(2,508) = 9,59$; $p = 0,00$). Deze verschillen zijn in het voordeel van de leerlingen in de experimentele programma's. Vervolgens is een variatieanalyse uitgevoerd naar het verschil tussen de drie programma's, waarbij de voortoets als co-variabele en natoets als afhankelijke variabele is gehanteerd. Ook deze analyse laat een significant verschil zien tussen de twee programma's, in het voordeel van het cognitieve en het sociale programma, ($F(3,507) = 109,79$; $p = 0,00$).

4.5. De resultaten van de multilevel analyse

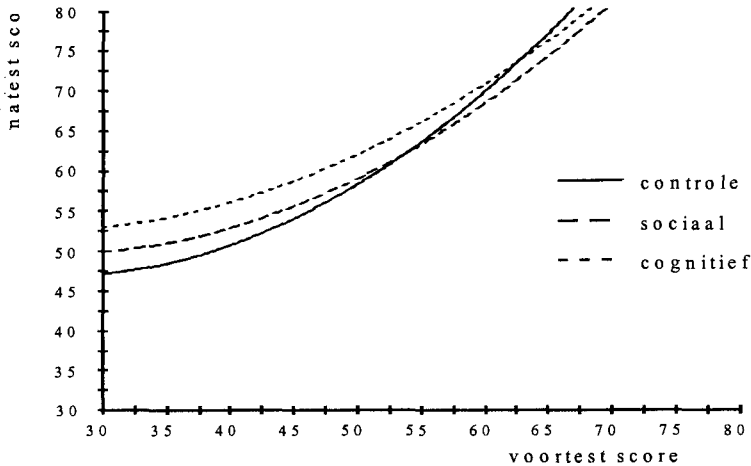
Figuur 2 representeert het basis model van de multiniveau analyse zoals die gedaan is. Pijl 1 representeert het effect van de voortoets op de natoets. Pijl 2 representeert het differentiële effect, hiermee is de differentiële effect hypothese geoperationaliseerd. Pijl 3 representeert de remediële effect hypothese, dit is het effect van het programma op het differentiële effect. De gestippelde pijl indiceert het hoofdeffect, deze is in het model opgenomen, omdat het noodzakelijk is om hiervoor te controleren.



Figuur 2: Het basis multiniveau model

Voor en na de uitvoering van de programma's werd de wiskundige redeneervaardigheid gemeten. Na het doorlopen van het programma behaalden de leerlingen in het cognitieve programma de hoogste gemiddelde score, gevolgd door de leerlingen in het sociale programma, terwijl de leerlingen in het controleprogramma de laagste gemiddelde score behaalden. Daarnaast bleek dat zwakke leerlingen in de experimentele programma's een hogere score behaalden dan de zwakke leerlingen in het controleprogramma. Dit effect was het sterkst voor de zwakke leerlingen in het cognitieve programma.

Figuur 3 geeft de grafieken weer van de resultaten van multiviveau analyse.



Figuur 3: De uitkomsten van de multiniveau analyse in regressiecurven

5. De tweede studie

Aanleiding voor de tweede studie waren de resultaten van de eerste studie ten aanzien van het differentiële effect en observaties in kleine groepen. Met name uit de observaties bleek dat de leerlingen van het cognitieve programma sociaal getinte opmerkingen maakten en leerlingen van het sociale programma cognitieve opmerkingen maakten. Mede op basis hiervan werd verwacht dat sociale en cognitieve aspecten elkaar zouden versterken. Zo besloten we een nieuw experiment op te zetten waarin de trainingen en de begeleiding van de leerlingen werden gecombineerd.

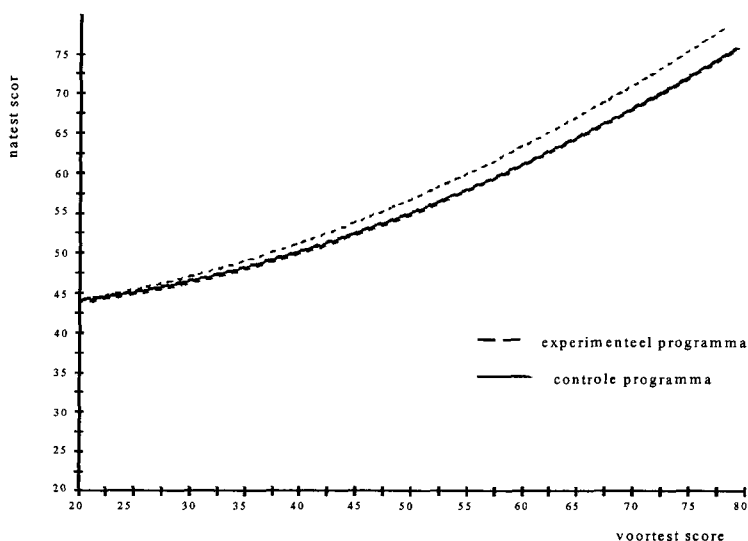
In de tweede empirische studie waarin 444 leerlingen uit 18 klassen van 2 scholen meededen, werd een nieuw experimenteel programma ontwikkeld. Dit keer werden de sociale en cognitieve strategieën niet in afzonderlijke programma's aangeboden, maar gecombineerd in één experimenteel programma. Voor het ontwikkelen van dit programma vormde de eerste studie de achtergrond. Verwacht werd dat de positieve effecten versterkt zouden worden als de experimentele programma's van de eerste studie gecombineerd zouden worden, speciaal met het oog op de zwakke leerlingen. Om dit te onderzoeken werden twee programma's ontwikkeld: (1) een experimenteel programma waarin de cognitieve en sociale programma's uit de eerste studie werden gecombineerd en (2) een controle programma, zonder speciale instructie. Voor de effectmeting werd dezelfde redeneertest als in eerste studie voorafgaand en direct na afloop van het experiment afgenomen.

De belangrijkste karakteristieken van de verdeling en van de gegevens uit de voor- en nameting worden in Tabel 2 weergegeven.

	Voortoets		Natoets	
	Gemiddelde	SD	Gemiddelde	SD
Controle Programma	51,6	8,7	52,0	7,0
Experimenteel Programma	51,7	9,2	53,5	8,1

Tabel 2: Gemiddelden op de voor en natoets met daarbij de standaard deviatie, N-leerlingen = 444, N-klassen = 18

Uit Tabel 2 is af te leiden dat de leerwinst van de leerlingen in het experimentele programma groter is dan die van de leerlingen in het controleprogramma. De leerwinst uitgedrukt in verschil scores is voor de experimentele groep 1,8 punten en 0,4 punten voor de controle groep. Variantie analyse op de natoets gecorrigeerd voor de voortoets laat een significant verschil zien in het voordeel van de leerlingen in het experimentele programma t.o.v. de leerlingen in het controleprogramma ($F(2,441) = 7,94$, $p = 0,000$). Er kan geconcludeerd worden dat er in het algemeen een klein positief effect is van het experimentele programma op het de leerwinst van de leerlingen met betrekking tot wiskundig redeneren.



Figuur 4: De uitkomsten van de multiniveau analyse in regressiecurven

5.1. De resultaten van de multilevel analyse

Voor de analyse van de resultaten is hetzelfde model gebruikt als voor eerste studie (zie Figuur 2). De multiniveau analyse laat zien dat er geen direct effect is van het experimentele programma, dit betekent dat de leerlingen in beide programma's niet verschilden op hun gemiddelde score. Er is echter wel een

effect van het programma op het differentiële effect, in het voordeel van de sterke leerlingen. De grafiek in Figuur 4 geeft dit weer.

De multiniveau analyse laat zien dat de zwakke leerlingen evenveel profiteren van het experimentele programma als de zwakke leerlingen in het controleprogramma. Echter de sterke leerlingen profiteren meer van het experimentele programma dan de sterke leerlingen in het controleprogramma.

5.2. Kwalitatieve data: boer Hekman

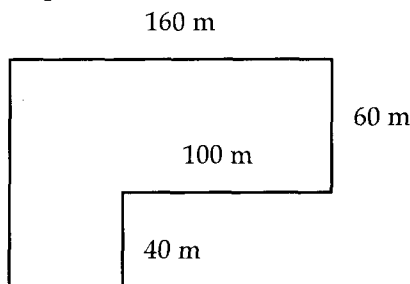
Na een klassikale introductie door de leerkracht werken de leerlingen in coöperatieve groepen aan realistische wiskunde opgaven. Boer Hekman is een voorbeeld van zo'n opgave. Hieronder is een protocol van het probleemoplossingsproces weergegeven. De groep bestaat uit twee meisjes (Jeanneke en Yvonne) en twee jongens (Amresh en Marcel). Amresh is van allochtone afkomst (Suriname, India) en heeft de laagste score van deze groep op de wiskundige redeneervaardigheidstest. Jeanneke had de hoogste score op de wiskundige redeneervaardigheidstest

De groep bestaat uit de volgende vier leerlingen (score op de voortest is ook gegeven):

	Score op wiskundige redeneervaardigheid (voortest)
J=Jeanneke	64
Y=Yvonne	52
A=Amresh	40
M=Marcel	54

De opgave

Hieronder zie je een schets van een L-vormig weiland van boer Hekman. Om dat weiland gaat boer Hekman een afrastering maken. Hoeveel meter is de lengte van de afrastering?



Het protocol: directe observatie en audiotape

- J Lees maar voor.
 Y Hieronder staat een rare vorm op ware grootte getekend...oh jee.
 A Nee, we zijn pas bij opgave 11

- (J leest nu opgave 11 voor, ze komt niet uit het woord afrastering en spreekt het telkens uit als afgastering)
- Y even denken hoor..
- M 40...100...60...160..
- A is 100...plus die 100...is 360
- Y Ja maar dit stuk en dit stuk, dit moet je er ook nog bijtellen
- J Ja dat is dus 40 plus 60...
- Y 100 meter..
- J ja da's 100 meter
(A en M herhalen de woorden van J & Y)
- A is 200,...460
- Y Ja maar je moet ook dit stuk nog doen...
- J Dit is..dit is...60
- M 500 meter...500 meter.
- Y Dit is 60, dit is 100
- A Wacht, wacht ik wil 't ook weten.
- Y Dit samen is ongeveer 160.
- A Nee hoor, dit is...dit is dunner dan ditte.
- Y Nee want deze stukjes zijn toch even groot?
- J Dit is ook 60 en dit is 100, kijk maar.
- A Ja is 100 samen, is 100 samen ja..
- J Is 160.
- A Wacht even ...100 ...100 plus....
- M (op de achtergrond) 500.
- Y 100...260...40.....is 520
- M Nee, 500.
- J 520, geloof ik (Er volgt een tijdje stilte, waarin iedereen 't nog eens na lijkt te rekenen)
- M Ja 520.
- J Hoeveel meter is de lengte? De lengte is.....is ..(schrijft in schrift het antwoord op)
- J Zo.
- A hè hè.
- J Opdracht 12...

Reflectie op het protocol

Vier zijden van de zes zijden van het veld zijn gegeven. De lengte van het prikkeldraad moet berekend worden. Het oplossingsproces voor deze opgave verloopt relatief soepel. De samenwerking is over het algemeen goed. Direct bij het begin zet Marcel de groep op het juiste spoor door de gegeven lengtes van de zijden op te tellen ($40 + 100 + 60 + 160$). Amresh maakt opmerkingen ten aanzien van de oplossing die tot dezelfde conclusie leiden: ... honderd plus honderd is driehonderd en zestig. Het is echter niet duidelijk of hij Marcel's woorden herhaalt of dat het zijn eigen oplossing is.

Yvonne wijst daarna naar de zijden waarvan de lengten niet gegeven zijn en zegt dat die zijden ook erbij geteld moeten worden. Jeanneke introduceert dan de moeilijkste stap in het oplossingsproces. Zij zegt dat de lengten aan de rechterkant optellen tot 100 ($40 + 60 = 100$). Yvonne is het met haar eens, de anderen volgen dan ook.

Dan is het Yvonne opnieuw die zegt dat er nog een lengte opgeteld moet worden, bijvoorbeeld de onbekende lengte aan de onderkant van de tekening. Opnieuw komt Jeanneke met het correcte antwoord: 60.

Hierna worden snel een aantal oplossingen gegeven en ontstaat er verwarring. Marcel komt met een antwoord van 500 meter, maar Yvonne corrigeert hem door te zeggen: "Kijk dit is zestig meter en die is honderd meter". Tot het laatst toe denkt Marcel dat het antwoord 500 meters is, maar gaandeweg realiseert hij zich dat het antwoord 520 moet zijn.

Amresh krijgt hulp van Yvonne en Jeanneke maar het blijft steken in onduidelijke aanwijzingen zoals honderd ... honderd..... plus (de ander reageren niet meer op zijn aanvullingen en Amresh speelt verder geen serieuze rol meer in het oplossingsproces). Vanuit observaties en dit protocol kunnen twee patronen worden afgeleid.

Patroon I: de bal doorgeven en scoren

In dit korte protocol zijn er twee episoden waarin Yvonne aangeeft dat er nog iets gedaan moet worden, namelijk het optellen van de onbekende zijden aan de linkerkant. Zij geeft aan dat dit bij het oplossingsproces hoort. Dit is een moment van reflectie en meta-cognitie. De volgende reflectie, opstellen van een strategisch plan en het berekenen wordt gedaan door Jeanneke (de leerling met de hoogste score op de voortest), die opmerkt dat de rechterkant optelt tot $40 + 60 = 100$. Yvonne en de anderen zijn het ermee eens. Hier blijkt duidelijk het voordeel van coöperatief leren.

Patroon II: Op sleeptouw nemen

Amresh lijkt het probleem niet helemaal te begrijpen (hij heeft de laagste score op de voortest van de groep van vier). Hij maakt onduidelijke opmerkingen en accepteert kritiekloos het laatste antwoord. Hij lijkt niet te profiteren van de aangeboden hulp. Het lijkt er in het begin op dat hij Marcel napraat. Dit is typisch een voorbeeld van het 'op sleeptouw nemen'. Wat tevens meespeelt bij Amresh is zijn etnische achtergrond en de taalproblemen die hij hierdoor heeft. Het lijkt erop dat Amresh steeds van zijn stuk wordt gebracht gedurende het hele oplossingsproces. Hij maakt onduidelijke opmerkingen zoals: "...honderd...honderd...plus". Het is duidelijk dat Amresh doordat hij een zwakke leerling is niet of nauwelijks kan bijdragen aan het oplossingsproces, zelfs al doet hij zijn best en ontvangt hij hulp. Op den duur zal hij afhaken. We vonden dit soort patronen een aantal keren bij verschillende gebeurtenissen. Als de leerkracht hiervoor niet waarschuwt en niet waakzaam is, zal dit type leerlingen in een negatieve spiraal terechtkomen. Misschien is dit één van de patronen die het differentiële effect van groepswork kunnen verklaren. Voor verschillende patronen van coöperatieve groepen, zie Terwel (1997), Good, Mulryan en McCaslin (1992) Salomon en Globerson (1989).

6. Conclusie en discussie

De hoofdconclusie uit deze onderzoeken is dat onderwijs in sociale vaardigheden of in cognitieve vaardigheden tot betere leerresultaten leidt bij het leren in kleine groepen bij het vak wiskunde in het eerste leerjaar in het voortgezet onderwijs. Leerlingen die hebben geleerd hoe zij kunnen samenwerken, behalen betere resultaten dan leerlingen die hierin niet expliciet zijn

getraind en begeleid. Datzelfde geldt voor de cognitieve vaardigheden bij het oplossen van wiskundige problemen. Bovendien bleek dat zwakke leerlingen in de experimentele programma's een hogere score behaalden dan de leerlingen in de controle groep. Daarmee is de hypothese bevestigd die aan dit onderzoek ten grondslag lag.

Bij deze conclusie willen we opmerken dat vier aspecten belangrijk zijn om de verschillen tussen de eerste en de tweede studie te verklaren: (1) de complexiteit van de innovatie; (2) de afstand tot de dagelijkse praktijk; (3) onzekerheid en (4) steekproefverschillen.

(1) Complexiteit: de instructie die de docenten moeten geven is in de tweede studie complexer dan in de eerste studie. Een probleem bij complexe instructie is dat docenten en leerlingen een langere tijd nodig hebben om te wennen aan de nieuwe situatie (Berman & McLaughlin, 1976).

Lou et al. (1996) beweren dat leerlingen van docenten die meer training en begeleiding hebben gehad betere leerresultaten behalen en dat een langere training ruimte laat om het experimentele programma aan te passen aan de opvattingen van de deelnemende docenten en de bestaande onderwijspraktijk.

De instructie in de tweede studie is relatief complex en uit praktische overwegingen was het niet mogelijk dat docenten uit de eerste studie in de tweede studie nu weer meededen, waardoor er niet geprofiteerd kon worden van hun ervaringen. De complexiteit van het tweede programma kan wel eens teveel van het goede zijn geweest voor de zwakke leerlingen.

(2) Afstand: de mate waarin de nieuwe praktijk lijkt op de dagelijkse routine van de docenten en de leerlingen is een belangrijke indicator van een innovatie (van den Akker, 1988). Leerlingen onderwijzen om strategieën te gebruiken bij het oplossen van wiskundige problemen in kleine groepjes behoort niet tot de dagelijkse praktijk van de docenten en de leerlingen die deelnemen in de studies. De afstand tot de dagelijkse praktijk van de eerste naar de tweede studie is toegenomen en kan dus een verklaring zijn voor de gevonden resultaten.

(3) Onzekerheid: een ander probleem bij innovatie van complexe instructie is onzekerheid (zie Cohen, 1988). Kennedy (1997) concludeert dat veel docenten houden van duidelijke routines. Ze zorgen ervoor dat leerlingen weten wat ze van hun leerkracht kunnen verwachten. Zowel docenten als leerlingen prefereren bekende routines boven nieuwe (Kennedy, 1997, p. 6), en als docenten hogere doelen willen bereiken, dan verlagen ze de zekerheid dat ze de doelen zullen halen, tegelijkertijd zijn ze voor het bereiken van de doelen afhankelijker van hun leerlingen (Kennedy, 1997, p. 9). De grotere complexiteit van de tweede studie speelt met name de zwakke leerlingen parten. Observaties uitgevoerd gedurende de beide studies gaven de indruk dat zwakke leerlingen wel in staat waren om aandacht te besteden aan één strategie, maar dat ze moeilijkheden hadden om hun aandacht te verdelen over twee verschillende strategieën. Dit wijst op overlading (zie Sweller, 1994).

Uit observaties uitgevoerd gedurende de fase tussen de diagnostische toets en eindtoets blijkt dat de docent de belangrijkste bron is voor de zwakke leerlingen. Voor de meeste docenten was het lastig om de leerlingen probleemoplossingsstrategieën te laten gebruiken. Ze vertellen liever hoe je een probleem oplost (De Corte, Verschaffel & Greer, 1996).

Uit gesprekken met docenten blijkt dat ze denken dat het voor zwakke leerlingen lastig is om probleemoplossingsstrategieën te gebruiken en ze vragen te stellen zoals: waarom los je het op zoals je doet? (Schoenfeld, 1985). Een docent zei: "Het is makkelijker om te vertellen hoe ze iets moeten oplossen in plaats van ze te laten nadenken over hoe je het kunt oplossen". Alhoewel docenten als ze vertellen hoe een probleem opgelost kan worden ze hun uitleg aanpassen aan het begrip en kennis van de zwakke leerlingen is het toch lastig voor deze leerlingen om zelfstandig een probleem op te lossen, doordat ze niet echt goed begrijpen wat de docent doet en waarom hij iets doet.

Onze bevindingen komen overeen met die van Mevarech en Kramarski (1997), die concluderen dat sterke leerlingen meer van de complexe instructie profiteren dan zwakke leerlingen. Ze zijn van mening dat de complexe interactie tussen het meta-cognitief vragen, coöperatief leren, en het geven van feedback de oorzaak is van hun bevindingen.

(4) Steekproef verschillen: in de eerste en in de tweede studie deden verschillende scholen mee. Dit betekent dat er verschillen kunnen zijn tussen de steekproeven. Er zijn inderdaad verschillen tussen de steekproeven: leerlingen in de eerste studie haalden op de voortoets hogere resultaten dan leerlingen in de tweede studie, deze verschillen zijn significant. Dit kan een oorzaak zijn dat leerlingen in de tweede studie minder profiteren van de interventie dan leerlingen in de eerste studie. Gedurende de tweede studie is de instructie complexer, terwijl het gemiddelde cognitieve niveau van de leerlingen lager was. Dit is in overeenstemming met Kennedy (1997), die concludeert dat het moeilijker wordt om een innovatie te implementeren als het cognitieve niveau daalt. In termen van Dar en Resh (1994) is het tweede experimentele programma in een armere omgeving geïmplementeerd. Met name zwakke leerlingen zijn gevoelig hiervoor.

(5) Homogene subgroepen: in deze studies werden groepen in de fase van alternatieve leerwegen homogeen samengesteld. Het is mogelijk dat in de zwakste groepjes te weinig sociale en cognitieve hulpbronnen (Prawat, 1989 spreek van 'resources') aanwezig waren om deze complexe vaardigheden te kunnen gebruiken. Hierdoor kan het effect zoals bij 4 genoemd (arme leeromgeving) nog zijn versterkt.

Alle vijf genoemde factoren kunnen samen een verklaring zijn voor de gevonden verschillen tussen de eerste en de tweede studie. Hoewel het hier gaat om een aantal factoren, lijkt in het bijzonder voor de zwakke leerlingen de factor 'complexiteit' cruciaal te zijn.

Het verdient aanbeveling bij het leren oplossen van wiskundige problemen in kleine groepen, expliciet aandacht te besteden aan de vaardigheden die hierbij van belang zijn. Ook zwakke leerlingen kunnen hiervan profiteren. Complexe programma's waarin meerdere vaardigheden tegelijk aan de orde worden gesteld kunnen echter leiden tot overlading en dat geldt in het bijzonder voor de zwakke leerlingen.

Literatuur

Akker, J.J.H. van den (1988). *Ontwerp en implementatie van natuuronderwijs*. Amsterdam: Swets & Zeitlinger.

- Ausubel, D.P. (1968). *Educational psychology: a cognitive view*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Berman, P. & McLaughlin, M.W. (1976). Implementation of educational innovation. *The Educational Forum*, 40, 345-370.
- Brenner, M.E., Mayer, R., Moseley, B., Brar, T., Dúran, R., Smith Reed, B. & Webb, D. (1997). Learning by understanding: the role of multiple representation in learning algebra. *American Educational Research Journal*, 34, 663-689.
- Chinnappan, M. & Lawson, M.J. (1996). The effects of training in the use of executive strategies in geometry. *Learning and Instruction*, 6, 1-17.
- Cohen, D.K. (1988). Plus a change. In P. Jackson (ed.), *Contributions to educational change: perspectives on research in practice issues* (pp. 27-84). National Society for the Study of Education series on contemporary issues. Berkeley, CA: McCuthan.
- Cohen, E.G. & Lotan, R.A. (1995). Producing equal-status interaction in the heterogeneous classroom. *American Educational Research Journal*, 32, 99-120.
- Collins, A., Brown, J.S. & Newman, S.E. (1989). Cognitive apprenticeship: teaching the crafts of reading, writing and mathematics. In L.B. Resnick (ed.), *Knowing, learning and instruction. Essays in the honor of Robert Glaser* (pp. 453-494). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- De Corte, E. & Verschaffel, L. (1988). Oplossingsvaardigheden en denkprocessen van jonge kinderen bij aanvankelijke redactie-opgaven. In G. Kanselaar, J.L. van der Linden & A. Pennings (ed). *Begaafdheid, onderkenning en beïnvloeding* (pp. 142-154). Amersfoort/Leuven: Acco. (Vriendenboek voor prof. dr. Pieter Span).
- De Corte, E., Verschaffel, L. & Greer, B. (1996). Mathematics, learning and instruction of, in E. de Corte & F. E. Wienert (1996). *International encyclopedia of developmental and instructional psychology* (pp. 535-538). New York: Pergamon Press.
- Dar, Y. & Resch, N. (1994). Separating and mixing students for learning: concepts and research. *Pedagogisch Tijdschrift*, 19, 109-126.
- Good, T.L., Mulryan, C. & McCaslin, M. (1992). Grouping for instruction in mathematics. In D.A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 165-197). New York: MacMillan.
- Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematical classrooms. *Learning and Instruction*, 7, 293-307.
- Hattie, J., Biggs, J. & Purdie, N. (1996). Effects of learning skills interventions on student learning: a meta-analysis. *Review of Educational Research*, 66, 99-136.
- Herfs, P.G.P., Mertens E.H.M., Perrenet J.Chr. & Terwel, J. (1991). *Leren door samenwerken*. Amsterdam, Lisse: Swets en Zeitlinger B.V.
- Hoek, D.J. (1998). *Social and cognitive strategies in co-operative groups: effects of strategy instruction in secondary mathematics*. Amsterdam: Universiteit van Amsterdam: Instituut voor de LerarenOpleiding (ILO). (dissertatie, uitgegeven door de auteur).
- Horn, W. (1969). *Prüfsystem für schul- und bildungsberatung* (Handanweisung). Göttingen: Verlag für Psychologie Hochrefe.
- Kennedy, M.M. (1997). The connection between research and practice. *Educational Researcher January/February 1997*, 4-12.

- Lou, Y., Abrami, P.C., Spence J.C., Poulsen, C., Chambers, B. & d'Apollonia, S. (1996). Within-class grouping: a meta-analysis. *Review of Educational Research*, 66, 423-458.
- Mevarech, Z.R. & Kramarski, B. (1997). Improve: a multidimensional method for teaching mathematics in heterogeneous classrooms. *American Educational Research Journal* 34, 365-394.
- Prawat, R.S. (1989). Promoting access to knowledge, strategy, and disposition in students: a research synthesis. *Review of Educational Research*, 59, 1-41.
- Resnick, L.B. (1989). Introduction. In L.B. Resnick (ed.), *Knowing, learning and instruction. Essays in honor of Robert Glaser* (pp. 1-24), Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Roelofs, E. & Terwel, J. (1999). Constructivism and authentic pedagogy: state of the art and recent developments in the Dutch national curriculum in secondary education. *Journal of curriculum studies*, 31, 201-227.
- Salomon, G. & Globerson, T. (1989). Why teams do not function the way they ought to. *International Journal of Educational Research*, 13, 89-99.
- Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problems solving*. San Diego, CA: Academic Press.
- Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: problemsolving, metacognition, and sense making in mathematics. In D.A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 165-197). New York: MacMillan.
- Streun, A. van (1989). *Heuristisch wiskunde-onderwijs: verslag van een onderwijs experiment*. Groningen: Rijksuniversiteit Groningen. (dissertatie).
- Streun, A. van (1994). Hoe onderwijs je probleemoplossen? *Tijdschrift voor didactiek der -wetenschappen*, 12, 210-225.
- Sweller, J. (1994). Cognitive load theory, learning difficulties, and instructional design. *Learning and Instruction*, 4, 295-312.
- Terwel, J. (1997). *Grenzen aan de groep? Een onderwijspedagogisch perspectief op leren in contexten*. Amsterdam: Vrije Universiteit (Intree Rede).
- Webb, N.M. (1989). Peer interaction and learning in small groups. *International Journal of Educational Research*, 13, 21-39.
- Webb, N.M. (1991). Task-related verbal interaction and mathematics learning in small groups. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 366-389.
- Webb, N. M. (1995). Testing a theoretical model of student interaction and learning in small groups. In R. Hertz-Lazarowitz & N. Miller (Eds.), *Interaction in cooperative groups: the theoretical anatomy of group learning* (pp. 102-119). Cambridge, MA: University Press.